Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Exercice 1 : dipôle (14,5/20 + bonus 1)	/14,5
Q1. figure 1 complétée + $\vec{p} = p\left(\cos\varphi\vec{e}_\rho - \sin\varphi\vec{e}_\varphi\right)$	
Par développement de $(\vec{p}\cdot\vec{e}_\rho)\vec{e}_\rho - \vec{p}$ avec $\vec{p} = p\left(\cos\varphi\vec{e}_\rho - \sin\varphi\vec{e}_\varphi\right)$, il vient $K = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}$	
$\varphi_1 = 0$ et $\rho_1 = z_1 = d$ donc $\vec{E}(M_1) = \dfrac{2K}{d^3}\vec{e}_z$; $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$ et $\rho_2^2 = 2d^2$ donc $\vec{E}(M_2) = \dfrac{K}{4d^3}\left(2\vec{e}_\rho + \vec{e}_\varphi\right)$ BONUS : comme de plus $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$, $\vec{e}_\rho = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_y + \vec{e}_z\right)$ et $\vec{e}_\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_y - \vec{e}_z\right)$ $\varphi_3 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\rho_3 = y_3 = d$ donc $\vec{E}(M_3) = \dfrac{K}{d^3}\vec{e}_\varphi(\varphi = \dfrac{\pi}{2}) = -\dfrac{K}{d^3}\vec{e}_z$ figure complétée (donc sans éxiger les rapports des normes des $\vec{E}$ respectifs cohérents)	
$\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2 E_\rho\right) = -\dfrac{2K\cos\varphi}{\rho^2}$; $\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi E_\varphi\right) = \dfrac{2K\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^3}$, d'où $f = 0$	
figure complétée avec les 3 vecteurs tangents aux 3 courbes coordonnées sphériques qui passent par M $\omega = \dfrac{2K\cos\varphi}{\rho^3}\mathrm{d}\rho + \dfrac{K\sin\varphi}{\rho^2}\mathrm{d}\varphi$ $\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{2K\cos\varphi}{\rho^3}\right) = -\dfrac{2K\sin\varphi}{\rho^3} = \dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{K\sin\varphi}{\rho^2}\right)$: ω est donc fermée	
remarque : compté juste la recherche de V quelque soit l'ordre choisi entre les primitives, par exemple : $\dfrac{\partial V}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow V(\rho,\varphi,\theta) = g_1(\rho,\varphi)$ $\dfrac{\partial V}{\partial\varphi} = \dfrac{\partial g_1}{\partial\varphi} = \dfrac{K\sin\varphi}{\rho^2} \Rightarrow V = -\dfrac{K\cos\varphi}{\rho^2} + g_2(\rho)$. d'où, d'une part $\dfrac{\partial V}{\partial\rho} = \dfrac{2K\cos\varphi}{\rho^3} + \dfrac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}\rho}$, d'autre part on cherche V tq $\dfrac{\partial V}{\partial\rho} = \dfrac{2K\cos\varphi}{\rho^3}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}\rho} = 0$ finalement toute fonction $V(\rho,\varphi,\theta) = -\dfrac{K\cos\varphi}{\rho^2} + cste$ convient.	

Exercice 2 : résolution d'équations différentielles (12/20 + bonus 1)	/12
On cherche $u = u_h + u_p$, avec $\dot{u}_p = 0$ (u_p cst comme c), d'où $u_p = \frac{c}{a}$, et avec $u_h = u_0\,\mathrm{e}^{rt}$: r vérifie l'éq. caractéristique $a - br = 0 \Leftrightarrow r = \frac{a}{b}$. u_0 vérifie $d = u(t=0) = \dfrac{c}{a} + u_0$, et on a donc $u(t) = \dfrac{c + (ad-c)\,e^{\frac{at}{b}}}{a}$	
On cherche $x(t) = x_h(t) + x_p$, avec $\dot{x}_p = 0$, d'où $x_p = \dfrac{6}{3} = 2$, et avec $x_h = x_1\,\mathrm{e}^{r_1 t} + x_2\,\mathrm{e}^{r_2 t}$, où r_1, r_2 sont donc solutions de l'éq. caractéristique $2r^2 + 5r + 3 = 0$, de discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$. $r_1 = -\dfrac{3}{2}$ et $r_2 = -1$. Comme de plus on veut $0 = x(t=0) = x_1 + x_2 + 2$ et $1 = \dot{x}(t=0) = -\dfrac{3}{2}x_1 - x_2$, on a donc $x(t) = 2 + 2e^{-\frac{3t}{2}} - 4e^{-t}$	
On cherche $q(t) = q_h(t) + q_p$, avec $q_h = q_1\,\mathrm{e}^{r_1 t} + q_2\,\mathrm{e}^{r_2 t}$, où r_1, r_2 sont solutions de l'éq. caractéristique $9r^2 + 1 = 0$, de solutions $r_{1,2} = \pm\dfrac{j}{3}$	

Les solutions réelles de l'EDHA sont donc $q_h(t) = Q\,\mathrm{e}^{j\frac{t}{3}} + \overline{Q}\,\mathrm{e}^{-j\frac{t}{3}}$, avec $Q = q_0\,\mathrm{e}^{j\theta_0} \in \mathbb{C}$, et q_h se réécrit $q_h(t) = 2\,\mathrm{Re}\left(q_0\,\mathrm{e}^{j(\frac{t}{3}+\theta_0)}\right) = 2q_0\cos(\frac{t}{3}+\theta_0) = q_1\cos(\frac{t}{3}) + q_2\sin(\frac{t}{3})$ (bonus = détail de la démonstration de la forme des solutions homogènes réelles)

La représentation complexe de la solution particulière $\underline{q}_p = q_0\,\mathrm{e}^{j2t}$ (avec $j^2 = -1$) vérifie $(q_0 - 36q_0)\,\mathrm{e}^{2jt} = 5\,\mathrm{e}^{2jt} \Leftrightarrow q_0 = -\dfrac{1}{7}$ et $q_p = \mathrm{Re}\left(\underline{q}_p\right) = -\dfrac{1}{7}\cos(2t)$

On a donc $q(t) = q_1\cos(\frac{t}{3}) + q_2\sin(\frac{t}{3}) - \frac{1}{7}\cos(2t)$ et $\dot{q}(t) = -\frac{q_1}{3}\sin(\frac{t}{3}) + \frac{q_2}{3}\cos(\frac{t}{3}) + \frac{2}{7}\sin(2t)$

Comme de plus on veut $1 = q(t=0) = q_1 + 0 - \frac{1}{7}$ et $0 = \dot{q}(t=0) = +\frac{q_2}{3} - 0$, on a donc $q(t) = \dfrac{8\cos\left(\frac{t}{3}\right)}{7} - \dfrac{\cos(2t)}{7}$

2.a) non linéaire et coefficient non constant

```python
# Initialisation
dt = 0.1
N = 41 #(compté juste N=40)
t = [0] * N
y = [0] * N

# Déroulé
t[0] = 1
y[0] = 2

for i in range(1,N):
    t[i] = t[0] + i*dt
    y[i] = y[i-1] + dt * (-1) * ( y[i-1]**2 + t[i-1]*y[i-1] )
```

Exercice 3 : chute libre (7/20 + bonus 1) /7

$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y$ (bonus si démontré en détail)

$\dot{x} = V$ (non noté), $\dot{y} = 2Ax\dot{x} + B\dot{x} = V(2Ax+B)$ (bonus $x = Vt$, non demandé) : $\vec{v} = V\left(\vec{u}_x + (2Ax+B)\vec{u}_y\right)$

$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 2AV\dot{x}\vec{u}_y = 2AV^2\vec{u}_y$

$\vec{P}_R = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g} \Leftrightarrow 2AV^2 = -g \Leftrightarrow A = -\dfrac{g}{2V^2}$

$v_y = \dot{y} = 0 \Leftrightarrow 2Ax_1 + B = 0 \Leftrightarrow B = -2Ax_1$

$y_0 = Ax_0^2 + Bx_0 = x_0\left(A\dfrac{1-B}{A} + B\right) = x_0$

$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = x_0\sqrt{2}$. Comme $y_0 = x_0 > 0$, $\theta_0 = \arctan\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right) = \dfrac{\pi}{4}$; figure complétée

$\vec{e}_x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_r(M_0) - \vec{e}_\theta(M_0))$, $\vec{e}_y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta)$,

d'où $\vec{v}(M_0) = V\left(\vec{e}_x + (2Ax_0 + B)\vec{e}_y\right) = \dfrac{V}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_r - \vec{e}_\theta + (2A\dfrac{1-B}{A} + B)(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta)\right)$,

qui se réécrit après simplification $\vec{v}(M_0) = \dfrac{V}{\sqrt{2}}((3-B)\vec{e}_r + (1-B)\vec{e}_\theta)$