End of First Semester Examination

Monday, January 25th, 2021. Total time: 3 hours

Instructions:

Make sure your work is well presented and readable. Calculators and formula sheet (one double-sided A4 page) allowed. The sections of the test are independent and can be attempted in any order. No un-justified answers will be taken into account.

Electromagnetic Induction Phenomena

1 Mutual induction between a solenoid and a loop (~9 points)

*We will study a cylinder of height H, long axis (Oz), negligible thickness, and radius R_1 around which we wind a metal wire of **radius** a over the full height(Figure 1). The metal wire is then connected to a current source, and a current i_1 flows within it. The cylinder is placed between the planes $z = -H/2$ and $z = +H/2$ in a cylindrical frame around the (Oz) axis: $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.*

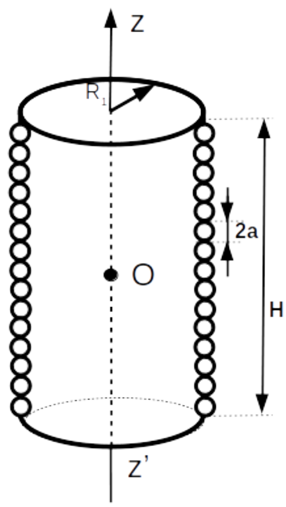


Figure 1: Solenoid

Question 1: How many loops (or turns) N compose the solenoid described? Express N as a function of the geometrical parameters of the problem.

If we are not interested in the magnetic field inside the winding that constitutes the solenoid, we can assimilate the current flow to that of an orthoradial surface current of density $\vec{k} = k\,\vec{u}_\theta$.

Question 2: Express k (carefully justifying your answer) as a function of N, H et i_1 then of a and i_1.

Question 3: After making a topographic study of the magnetic field $\vec{B}_1$, calculate the field $\vec{B}_1$ created by this current distribution in the whole cylinder **neglecting edge effects**, that is to say considering that the field lines are those that would be observed for a cylinder of infinite height. To enable this, we will admit that $\vec{B}_1(r,\theta,z) = \vec{0}$ if $r > R_1$ and we will express the field as a function of k.

Question 4: Calculate the inductance L_1 of the solenoid as a function of N, R_1, a and μ_0

We will supply the solenoid with a sinusoidal voltage $u_1(t) = U_1 cos(\omega t)$. The resulting current in the solenoid is $i_1(t) = I_1 cos(\omega t + \varphi_1)$. The total resistance of the circuit is R_{S1}.

Question 5: Make a sketch of the circuit. Express I_1 and φ_1 as functions of L_1,R_{S1}, ω and U_1.

*We place **a loop** of radius $R_2 > R_1$ and with the same axis as the cylinder in the $z = 0$ plane. The resistance of this loop is R_{S2} and its self inductance is L_2. We orientate the surface delimited by the closed contour of the spire such that the surface normal is along $+\vec{u}_z$.*

Question 6: Calculate the mutual inductance Mbetween the loop and the solenoid as a function of the geometrical parameters of the problem. To do that, it is strongly advised to first make a sketch.

Question 7: Numerical application: Calculate M and L_1, with R_1=1.1 cm, R_2= 1.2 cm, H =10 cm and a=1 mm. Reminder:$\mu_0 = 4\pi.10^{-7} H.m^{-1}$. Comment on the obtained values.

We remark that a current $i_2(t)$ appears in the loop.

Question 8: Explain **rigorously** (and without skipping any step) why a current comes up in the current loop. Is it a transient current? Or a direct current? Or a sinusoidal one? Justify your answer.

Question 9: Sketch the electric circuit equivalent to the loop and the solenoid. Indicate the mutual inductance between them as well as the self-inductance L_2 of the loop.

Question 10: Using the complex notation write the electrical equations that are fulfilled by the voltages and the currents in the current loop and in the solenoid first generally and then **in sinusoidal regime**.

Question 11: Deduce the complex expression of the current $\underline{i_1}$ as a function of $\underline{u_1}$, R_{S1}, R_{S2}, L_1, L_2, M and ω.

Question 12: Deduce from the expression of $\underline{i_1}$ the equivalent impedance of the solenoid. What is the value taken by the equivalent impedance when ω tends to 0? Comment upon it.

2 Magnetic levitation of a ring (or loop) (~4 points)

The magnetic potential energy of a circuit crossed by a current i and located in a magnetic field is given to be: $E_p = -i\phi$, where ϕ is the flux of the magnetic field through the circuit. The Laplace force which is exerted on the circuit is then given by: $\vec{F} = -\vec{\nabla}(E_P) = -gr\vec{a}d(E_P)$.

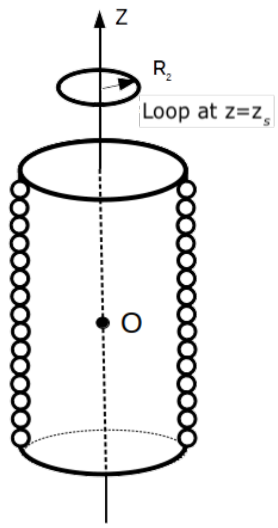


Figure 2: Ring (or loop) located in the magnetic field of the solenoid

The ring has a radius $R_2 < R_1$ and it is placed at the altitude $z = z_S$, where $z_S > H/2$ (see Figure 2). ***We will assume that the magnetic field $\vec{B}_1$ created by the solenoid doesn't vary along the radial direction.*** *It is then justified to express: $\vec{B}_1 = B_{1r}(z)\vec{u}_r + B_{1z}(z)\vec{u}_z$. In particular, we will consider that the component B_{1z} is constant over the surface of the ring.*

Question 13: Calculate the **Laplace** force exerted on the current loop as a function of its radius R_2, of the current $i_2(t)$ (current flowing through the current loop and generated by the solenoid as a consequence of electromagnetic induction) and of spatial derivatives of one or several components of $\vec{B}_1$.

Question 14: Discuss on the direction and orientation of the Laplace force.

The experience shows that the loop, placed on top of the cylinder powered by a voltage generator, can levitate. An example of this kind of magnetic levitation is given in Figure 3 (left), where the bottom part is fixed and corresponds to the solenoid, while the top part is mobile and levitates above the first one[1]. It is also possible to power the mobile part while in levitation (Figure 3 (right): the lamp lights up while levitating).

Figure 3: Magnetic levitation (left). Simultaneous levitation and contactless powering of a lamp (right)

Question 15: Explain these phenomena **without resorting to calculations** (but rigorously). On which condition(s) the current(s) i_1 and/or i_2 make this experience possible? Which parameters can we adjust to increase the levitation force in order to make heavier payloads levitate? And to increase the electrical power transfered to the lamp? (This is an open question: no complicated calculations or long delevopments are expected, but rather arguments based on the physical principals that you know).

Recall the gradient operator in cylindrical coordinates:

$$\vec{\nabla}U = gr\vec{a}d\,U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z$$

3 Electromagnetic field in a metallic plate (~7 points)

Let us consider a metallic plate of thickness $e = 10\ cm$ and of conductivity $\gamma = 10^6\ S.m^{-1}$. The vertical (Oz) axis, oriented towards the top, and with unit vector $\vec{u}_z$, is placed perpendicularly to the plate in such a way that the origin O $(z = 0)$ is located on the inferior side of the plate, which is assumed to be infinite in all horizontal directions. This plate is immersed in an time-varying magnetic field, whose frequency is sufficiently high to produce a wave. We let this frequency be 10^{11} Hz. The wave that propagates in the metal, with speed $v = 1\,000\,km.s^{-1}$, is described by the following equation:

$$\vec{B} = A\,e^{-\alpha z} cos(\omega t - kz + \varphi_0)\,\vec{u_x}$$

where $\vec{u_x}$ is the unit vector of the Cartesian frame given by $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, A is a positive constant, $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$, and $\alpha = 0.625\ \mu m^{-1}$.

Question 16: Describe this wave as precisely as possible. In particular, provide the numerical values of ω and k, and determine (with a proper justification) if it is a plane or spherical wave.

[1] https://mouvements-phenix.com/

Question 17: Give the norm of $\vec{B}$ **as a function of time** at the point $O(0,0,0)$ of the surface of the plate, between $t = 0$ and $t = 2T$, with T being the period of the wave.

Question 18: Graph (as precisely as possible) the norm of $\vec{B}$ **as a function of** z, on the (Oz) axis, between $z = 0$ (surface of the plate) and $z = 30\ \mu m$, for $t = 2T$, with T being the period of the wave. Comment the result.

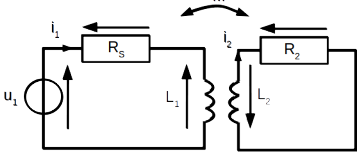
The electromagnetic field that propagates in the metallic plate also contains a harmonic electric field component.

Question 19: After finding the simplified Maxwell-Ampère equation for this medium (justifications required), calculate the electric field $\vec{E}$ related to the magnetic field $\vec{B}$. Compare the structure of the obtained wave (relative position of the vectors $\vec{E}$, $\vec{B}$ and $\vec{k}$) with that of an electromagnetic wave propagating in vacuum.

Devoir de synthèse de Physique

2ème année, 24 Janvier 2021 : Correction et barème

Partie 1 : Induction mutuelle entre un cylindre et une spire	**Points**	**Total question**
1- $N = \dfrac{H}{2a}$	1	1
2- En identifiant la distribution de courant constituée de $\dfrac{N}{H}L$ fils portant chacun l'intensité i_1 ($\dfrac{N}{H}$ est le nombre de spires par mètre) et celle qui porte une densité surfacique $\vec{k}$ à travers une ligne de longueur L, on peut écrire :		
$\dfrac{N}{H}Li_1 = kL$, d'où $k = \dfrac{Ni_1}{H}$	1	
ou encore avec la question précédente : $k = \dfrac{i_1}{2a}$	1	2
3- Etude des symétries : dans un repère cylindrique, tout plan de type $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie de la distribution de courant. Donc $\vec{B_1}$ est perpendiculaire à ce plan :	1	
$\vec{B}_1 = B_{1z}(r, \theta, z)\,\vec{u}_z$	1	
Invariance en z et θ	1	
$\vec{B}_1 = B_{1z}(r)\,\vec{u}_z$	1	4
Par Maxwell-Ampère (local, donc), on a $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ car il n'y a pas de courant de conduction volumique, seulement un courant surfacique.	1	
Le rotationnel en coordonnées cylindriques donne :$\dfrac{\partial B_{1z}}{\partial r} = 0$ donc $B_{1z} = cte$	1	
On trouve la constante avec les relations de passage en $r = R_1$:	0,5	
On définit une normale le long de $\vec{u}_r$	0,5	
$\vec{n} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{k}$	1	
Le champ hors du solénoïde est nul (énoncé), il vient :		
$\vec{u_r} \wedge (\vec{0} - B_{1z}\vec{u_z}) = \mu_0 k \vec{u}_\theta$ donc $B_{1z} = \mu_0 k$	1	5
Par le théorème d'Ampère : choix du contour d'Ampère : rectangle de longueur L (dimension parallèle à $\vec{u_z}$) et de largeur h (dimension parallèle à $\vec{u_r}$) : dessin et orientation obligatoires !	1	**ou**
$\oint \vec{B}_1.\vec{dl} = \mu_0 \sum_i I_i$	0,5	
La circulation est nulle sur les trajets le long de $\vec{u}_r$, et nulle à l'extérieur car le champ est nul.	1	
Il vient : $B_{1z}L = \mu_0 kL$	1+1	
Vérifier la cohérence des signes entre le sens de la circulation et le signe des courants qui traversent la surface	(signes)	
Donc $B_{1z} = \mu_0 k$	0,5	5

4- Inductance du solénoïde : on doit calculer le flux envoyé par le solénoïde dans lui-même : $\phi_{11} = N \iint_{S_1} \vec{B}_1 . d\vec{S}$ (compter 0 si N manque, mais compter les points ensuite si les calculs sont cohérents) $\phi_{11} = N\mu_0 k\pi {R_1}^2$ car le champ est uniforme sur la section Mais cette forme ne permet pas de calculer L_1 car il faut $\phi_{11} = L_1 i_1$, donc il faut faire apparaître i_1. $\phi_{11} = \pi\mu_0 N {R_1}^2 \dfrac{N}{H} i_1$ d'après les questions précédentes D'où : $L_1 = \pi\mu_0 \dfrac{N^2 R_1^2}{H}$ (compter les point si k est faux dans la question précédente mais les calculs cohérents)	1 0,5 1 (ϕ_{11}) 0,5 1	4
5- Dessin du circuit avec flèches des tensions très clairement affichées On a : $\underline{u}_1 - jL_1\omega\underline{i}_1 - R_{S1}\underline{i}_1 = 0$ D'où : $\underline{i}_1 = \dfrac{\underline{u}_1}{R_{S1} + jL_1\omega}$ Ce qui donne : $I_1 = \dfrac{U_1}{\sqrt{{R_{S1}}^2 + {L_1}^2\omega^2}}$ et $\varphi_1 = -arctan(\dfrac{L_1\omega}{R_{S1}})$	1 1 1 1+1	5
6- Inductance mutuelle : le solénoïde envoie du flux dans la spire mais **sur une surface** S_1 **seulement** : $\phi_{12} = \iint_{S_1} \vec{B}_1 . d\vec{S}$ ($d\vec{S}$: surface élémentaire orientée comme la spire) Ici, une seule spire, donc pas de facteur devant l'intégrale. Le calcul est similaire à la question sur L_1 : $\phi_{12} = \pi\mu_0 {R_1}^2 \dfrac{N}{H} i_1$ On identifie à : $\phi_{12} = M i_1$ Ce qui donne : $M = \pi\mu_0 {R_1}^2 \dfrac{N}{H}$ (compter les point si k est faux dans la question précédente mais les calculs cohérents)	1 1 1 1	4
7- A.N. : $L_1 = 11.9\,\mu H$ et $M = 0.24\,\mu H$ M est donc largement négligeable devant L_1. 1	2+2 1	5
8- Le courant $i_1$est sinusoïdal donc **dépendant du temps**, il génère un **champ magnétique** $B_1(t)$ dont les lignes de champ sont envoyées sur la surface définie par la spire, ce qui **génère un flux** $\phi_{12}(t)$, donc une **tension induite** par **induction statique.** $e_{ind} = -\dfrac{d\phi_{12}}{dt}$. **Le circuit étant fermé**, on voit donc apparaître un **courant** $i_2(t)$. (Les termes en gras doivent apparaître à bon escient. Enlever 1 point par terme manquant.)	3	3
9- Schéma :  (accepter aussi un générateur d'induction dans les deux circuits, à condition qu'ils soit dans le bon sens : $-jM\omega i_1$ ou $-jM\omega i_2$ en convention générateur).	2	2
10- Loi des mailles : $\underline{u}_1 - R_{S1}\underline{i}_1 - jL_1\omega\underline{i}_1 - jM\omega\underline{i}_2 = 0$ $jL_2\omega\underline{i}_2 + jM\omega\underline{i}_1 + R_{S2}\underline{i}_2 = 0$	2 2	4
11- La seconde équation permet d'exprimer i_2 en fonction de i_1, on insère cette expression dans la première équation pour trouver i_1 : $\underline{i}_1 = \dfrac{\underline{u}_1}{R_{S1} + \frac{M^2\omega^2}{R_{S2}+jL_2\omega} + jL_1\omega}$	2	2
12- Par définition de l'impédance, $\underline{u}_1 = Z_1\underline{i}_1$, donc $Z_1 = R_{S1} + \dfrac{M^2\omega^2}{R_{S2} + jL_2\omega} + jL_1\omega$ L'impédance tend vers R_{S1} quand ω tend vers 0	2 1	

... ce qui est normal car en continu, les inductances disparaissent, seule la résistance demeure.	1	4
	Total	45

Partie 2 : Lévitation magnétique d'un anneau	**Points**	**Total question**
13- On calcule d'abord le flux envoyé par le champ $\vec{B}$ à travers la spire :		
$\phi = \iint_{spire} \vec{B}.\vec{dS}$	1	
On oriente la spire par une normale le long de $\vec{u}_z$	0,5	
$\phi = \iint_{spire} (B_{1r}\vec{u}_r + B_{1z}\vec{u}_z).dS\vec{u}_z = \iint_{spire} B_{1z}dS$	1,5	
Comme B_{1z} est constant sur toute la spire : $\phi = B_{1z}\pi {R_2}^2$	0,5	
Donc $E_P = -i_2 B_{1z}\pi {R_2}^2$	0,5	
Et la force de Laplace : $\vec{F_L} = -\vec{\nabla}(E_P) = +i_2\pi {R_2}^2\vec{\nabla}(B_{1z}) = +i_2\pi {R_2}^2\dfrac{\partial B_{1z}}{\partial z}\vec{u}_z$	2	6
14- Avec un axe (Oz) tourné vers le haut, avec un courant positif orienté par l'axe (Oz) : $\dfrac{\partial B_{1z}}{\partial z} < 0$ (ou toute discussion cohérente sur le signe de ce terme).	1	
$\vec{F_L}$ est dans la direction (Oz). Le sens de $\vec{F_L}$ dépend du signe de i_2.	1	
i_2 a le signe de $-\dfrac{d\phi}{dt}$ car c'est un courant induit par le solénoïde, donc si le flux augmente, alors la spire est éjectée car $\vec{F_L}$ est vers le haut. C'est l'inverse si le flux diminue.	2	4
15- Explication du phénomène : (ce qui revient à résumer les questions précédentes) : Le **courant** i_1 circulant dans le solénoïde crée un **champ magnétique** $\vec{B_1}$ envoyé dans la spire, ce qui génère un **flux** ϕ qui, s'il est **variable avec le temps**, génère une **tension induite** e_{ind} qui, comme le circuit est fermé, génère un **courant induit** i_2. Ce courant **alimente la lampe** et permet de l'allumer. La spire parcourue par un courant dans un champ magnétique est soumise à une **force de Laplace** $\vec{F_L} = \int_{spire} I\vec{dl}.\vec{B}$ qui vient **s'opposer au poids**. Enlever 1 point par étape sautée (chaque élément en gras constitue une étape). Il s'agit ensuite d'une question **ouverte**. On valorisera donc principalement les idées sans demander une résolution totale qui n'est d'ailleurs pas exigible. Chaque élément ci-dessous peut donner des points : donner 7 points au maximum, à piocher dans la liste ci-dessous. En cas de remarque pertinente, ne pas hésiter à donner d'autres points (à concurrence de 7, maximum de cette partie de la question).	4	4
* Pour qu'il y ait lévitation, c'est à dire compensation du poids de la spire de manière permanente la force doit durer dans le temps. La force de Laplace apparaissant par induction, **il faut donc que le flux varie tout le temps** pour conserver la force non nulle.	1	
* **Un courant** i_2 **non nul** $\forall t$ **ne peut pas exister si** i_1 **est continu** (sauf à l'établissement du courant et à son extinction) car sinon la force est nulle car l'induction est nulle.	2	
* Si le courant i_1 est par exemple sinusoïdal, de type $I_1 cos(\omega t + \phi_1)$, donc $\vec{B_1}$ également, donc ϕ_1 aussi. **Le courant** i_2**, issu de la dérivation temporelle de** ϕ_1 **sera donc nécessairement proportionnel à** I_1**,** S**, mais aussi à** ω à cause de la dérivation temporelle. Le même raisonnement s'appliquera quel que soit le type de fonction périodique de pulsation ω pour $i_1(t)$.	3	

Augmenter S augmente aussi le poids de la spire. Augmenter I_1 peut se faire tant que le solénoïde ne fond pas par effet Joule. **Le mieux est donc d'augmenter la fréquence pour avoir une chance de faire augmenter la force, mais aussi i_2, donc aussi la puissance électrique transférée**.	2	
Il faut une spire de résistance faible pour que i_2 soit le plus grand possible pour une tension induite (et donc une variation de flux) donnée	1	
Il faut non seulement que la variation de flux ne soit jamais nulle mais aussi **que la moyenne temporelle de la force sinusoïdale ne soit pas nulle** pour avoir une chance de compenser le poids quel que soit t.	2	7 points max
Total		21

Partie 3 : Champ électromagnétique dans une plaque métallique		
16- L'onde est harmonique (*), monochromatique (*), progressive (*) dans le sens des z croissants (*), elle est polarisée rectilignement (*) dans la direction $\vec{u}_x$(*). Elle est transversale. L'onde est **uniforme amortie** Elle est **plane** car le lieu des points pour lesquels la phase est constante à t fixé est le plan d'équation $z = cte$, pernpendiculaire à zz' (pas de points sans justification) $k = \dfrac{\omega}{v} = 6.28.10^5\, rd.m^{-1}$ sa **pulsation** est $\omega = 2\pi f = 6.28.10^{11} rd.s^{-1}$(pour k et ω, pas de points sans unité).	0,5 point par * = 3 1 1 0,5 0,5	6
17- Si on fixe $z = 0$ on a : $\vec{B} = A\, cos(\omega t - \frac{\pi}{2})\, \vec{u_x} = A\, sin(\omega t)\, \vec{u_x}$ Pour représenter la composante le long de $\vec{u}_x$, il suffit donc de représenter 2 périodes d'une fonction sinus (veiller à ce que A soit mentionné sur le graphe (-0.5), que la phase à l'origine soit bien 0 (-1), qu'il y ait bien deux périodes et pas plus (-1.5), que les axes soient correctement nommés (-0.5 si manquant) avec leurs unités ($\left\Vert \vec{B} \right\Vert$ en Tesla (-0.5), t en secondes (-0.5). Pour représenter la norme, même chose en valeur absolue **(compter les deux justes)**	2 3	5
18- Si on fixe $t = 2T$ on a : $\vec{B} = A\, e^{-\alpha z} cos(\omega 2T - kz + \varphi_0)\, \vec{u_x}$ $= A\, e^{-\alpha z} cos(4\pi - kz - \frac{\pi}{2})\, \vec{u_x} = A\, e^{-\alpha z} cos(-kz + \frac{7\pi}{2})\, \vec{u_x}$ $= A\, e^{-\alpha z} cos(-kz - \frac{\pi}{2})\, \vec{u_x} = -A\, e^{-\alpha z} sin(kz)\, \vec{u_x}$ (accepter une forme en cosinus) Pour représenter la composante le long de $\vec{u}_x$, il faut donc dessiner une sinusoïde fortement amortie : schéma avec des axes corrects, unités (2 points si elle ressemble à une sinusoïde amortie, points supplémentaires pour la justification, voir ci-après). Pour représenter la norme, prendre la valeur absolue (**compter les deux justes :** composante ou norme) Justification de l'aspect amorti par comparaison de $\dfrac{1}{\alpha}$ et λ. En effet, la valeur de $1/\alpha = 1.6\, \mu m$ est très inférieure à la longueur d'onde $\lambda = 10\, \mu m$ La sinusoïde part de 0 pour $z = 0$ et part ensuite vers le bas à cause du signe négatif. On demande de représenter jusqu'à $z = 30\, \mu m$. Or, $t = 2T$ et $\lambda = 10\, \mu m$. Donc le front d'onde est à $z = 20\, \mu m$ seulement : représenter 2 périodes, puis la norme de $\vec{B}$ nulle au delà.	2 2 2 1 2	9
19- Maxwell-Ampère : $\vec{\nabla} \wedge \dfrac{\vec{B}}{\mu} = \gamma \vec{E} + \epsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, mais le rapport entre les amplitudes des courants de conduction et des courants de déplacement (sinusoïdaux) est :		

$\frac{\left\lVert\gamma\vec{E}\right\rVert}{\left\lVert\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right\rVert} = \frac{\gamma}{\epsilon\omega} = 1.8.10^5$, on peut donc largement ignorer les courants de déplacement et écrire : $\vec{\nabla}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu} = \gamma\vec{E}$	3	
$\vec{B}$ ne dépend que de z et il n'a qu'une composante B_x, de sorte que : $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial z}\vec{u}_y = \gamma\mu\vec{E}$	3	
Donc $\gamma\mu E = -A\alpha e^{-\alpha z}cos(\omega t - kz + \varphi_0) + Ake^{-\alpha z}sin(\omega t - kz + \varphi_0)$ $E_y = \frac{A}{\mu\gamma}e^{-\alpha z}\left[-\alpha\, cos(\omega t - kz + \varphi_0) + k\, sin(\omega t - kz + \varphi_0)\right]$	3	
On constate que $\vec{E}$ est le long de $\vec{u}_y$, donc perpendiculaire à $\vec{B}$ et les deux vecteurs perpendiculaires à la direction de propagation	1	
On retrouve bien la structure de l'onde électromagnétique transversale qui se propage dans le vide, avec $\vec{k}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ formant un trièdre direct.	2	12
Total partie 3 :		32
Total général :		98