

Exercice 1

1.	L'intégrale est généralisée uniquement en $+\infty$ car la fonction intégrée est continue sur $[1, +\infty[$. $\forall x \geq 1, \left \frac{x\sqrt{x}}{1+x^3} \sin(x^2) \right \leq \frac{x\sqrt{x}}{1+x^3} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/2}}$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ converge, on en déduit que notre intégrale converge absolument et donc converge.
2.	L'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$ car la fonction intégrée est continue sur $]0, +\infty[$. • $\frac{1+x^{2025}}{\sqrt{x}e^x} \underset{x \rightarrow 0+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$. Comme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge, on en déduit que $\int_0^1 \frac{1+x^{2025}}{\sqrt{x}e^x} dx$ converge aussi (par comparaison de fonctions positives); • $\frac{1+x^{2025}}{\sqrt{x}e^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^{2024,5}}{e^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{1+x^{2025}}{\sqrt{x}e^x} dx$ converge aussi. En conclusion, notre intégrale est convergente.
3.	L'intégrale est généralisée en 0 et en 1 car la fonction intégrée est continue sur $]0, 1[$. • $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{\ln(x)} = 0$ donc l'intégrale est faussement généralisée en 0, qui ne pose donc finalement pas problème; • $\frac{x^2}{\ln(x)} \underset{x \rightarrow 1-}{\sim} \frac{1}{x-1}$. Or $\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx$ diverge (de même nature que $\int_{-1}^0 \frac{1}{u} du$) donc $\int_0^1 \frac{x^2}{\ln(x)} dx$ diverge. En conclusion, notre intégrale est divergente.

Exercice 2

1.	Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-n+1} \ln t = 0$ par croissances comparées et $\lim_{t \rightarrow 1} t^{-n+1} \ln t = 0$, et que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$ converge pour $n \geq 2$, une IPP donne : $\forall n \geq 2, c_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^n} dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{-n+1}}{-n+1} \ln t - \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{-n+1}}{-n+1} \ln t - \frac{1}{-n+1} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt = \frac{1}{(n-1)^2}$.
2.	Pour $n = 0, a_0 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t+1} dt$ diverge par comparaison avec l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ puisque $\frac{\ln t}{t+1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t} \geq \frac{1}{t} > 0$ pour $t \geq e$. Pour $n \geq 1, a_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^n(t+1)} dt$ est généralisée en $+\infty$ car la fonction intégrée est continue sur $[1, +\infty[$. Or $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{3/2} \frac{\ln t}{t^n(t+1)} = 0$ par croissances comparées, donc $\frac{\ln t}{t^n(t+1)} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$. L'intégrale converge donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente; on peut aussi arriver au même résultat en remarquant que $\forall t \geq 1, 0 \leq \frac{\ln t}{t^n(t+1)} \leq \frac{\ln t}{t^{n+1}}$ et utiliser la question 1.
3.	La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est positive car ses termes sont obtenus par intégration d'une fonction positive de 1 à $+\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t > 1, \frac{1}{t^n} > \frac{1}{t^{n+1}}$, avec égalité seulement pour $t = 1$. Par multiplication avec la quantité positive $\frac{\ln t}{t+1}$, suivie d'une intégration sur $[1, +\infty[$ on obtient $a_n > a_{n+1}$. La suite est donc strictement décroissante. La suite étant décroissante et minorée par zéro, elle converge.
4.	Pour tout $t \geq 1$, on a $t+1 \geq 1$, d'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \frac{\ln t}{t^n(t+1)} \leq \frac{\ln t}{t^n}$. Par intégration sur $[1, +\infty[$ on obtient $0 \leq a_n \leq c_n = \frac{1}{(n-1)^2}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, par encadrement.
5.	Par calcul, pour tout $n \geq 2, a_n + a_{n+1} = c_{n+1}$. Or la suite (a_n) est décroissante, donc $2a_{n+1} \leq a_n + a_{n+1} \leq 2a_n$. On en déduit que $c_{n+1} \leq 2a_n \leq c_n$, d'où l'inégalité à prouver.
6.	Par encadrement et théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 a_n = 1$ donc $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

Exercice 3

Quest. Prélim.	La fonction $x \mapsto \varphi(x)$ est dérivable sur $[0, 1]$ et $\varphi'(x) = \ln(t)(t^{x-1} - t^{1-x})$. Pour $t \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, on a $\ln t \geq 0$, $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t} \leq 1$ et $t^{1-x} = e^{(1-x)\ln t} \geq 1$. Donc $\varphi'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, ce qui prouve que φ est décroissante sur $[0, 1]$. (on peut aussi écrire $\varphi'(x) = \ln(t)t^{1-x}(t^{2x-2} - 1)$ et justifier que $t^{2x-2} \leq 1$).
1.	L'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$ car la fonction intégrée est continue sur $]0, +\infty[$. • $\frac{t^{x-1}}{1+t^2} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$. Or $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt$ converge si et seulement si $1-x < 1$, donc par comparaison de fonctions positives, $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t^2} dt$ converge si et seulement si $x > 0$. • $\frac{t^{x-1}}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3-x}}$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3-x}} dt$ converge si et seulement si $3-x > 1$, donc par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t^2} dt$ converge si et seulement si $x < 2$. En conclusion, l'ensemble de définition de f est $D =]0, 2[$.
2. (a)	$\forall x \in D, f(2-x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{1-x}}{1+t^2} dt \underset{u=1/t}{=} \int_{+\infty}^0 \frac{u^{x-1}}{1+1/u^2} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u^2} du = f(x)$.
(b)	La courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$.
3. (a)	La même chose qu'en 2.(a), sauf pour les bornes.
(b)	Immédiat par la relation de Chasles.
(c)	D'après la question préliminaire, pour $t \geq 1$ quelconque fixé, et pour tous x, y tels que $0 < x \leq y \leq 1$, $t^{x-1} + t^{1-x} \geq t^{y-1} + t^{1-y}$. Par division par $1+t^2$, puis par intégration sur $t \in [1, +\infty[$, on obtient $f(x) \geq f(y)$. Donc f est décroissante sur $]0, 1]$.
4.	f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, 2[$ par symétrie de sa courbe (question 2.b)), et donc f admet bien un minimum en $x = 1$. Ce minimum vaut $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.
5. (a)	Par relation de Chasles, $\int_0^{+\infty} g(t) dt = \int_0^1 g(t) dt + \underbrace{\int_1^{+\infty} g(t) dt}_{\geq 0} \geq \int_0^1 g(t) dt$.
(b)	Pour tout $x \in D$, $f(x)$ est l'intégrale d'une fonction positive. Donc $f(x) \geq \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t^2} dt \geq \frac{1}{2} \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{2x}$.
(c)	D'après la question précédente, par passage à la limite quand $x \rightarrow 0^+$, on trouve $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Or la fonction est symétrique par rapport à $x = 1$, donc elle possède la même limite à droite de son domaine de définition, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$.