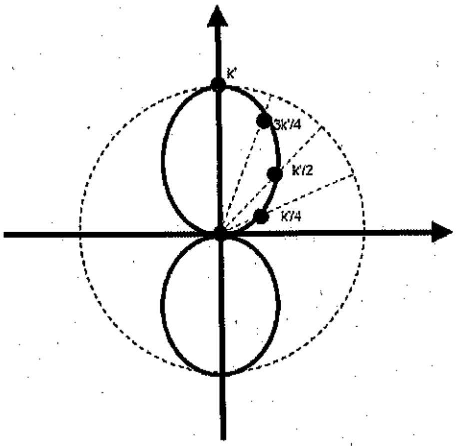
# Interrogation écrite de physique 1 - Semestre 3
## Correction et barème

| **Exercice 1 :** Champ scalaire et vectoriel | | |
|---|---|---|
| Éléments de correction, répartitions des points et total question | | |
| On calcule la divergence du champ vectoriel $\vec{A}$ : $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 3(x^2+y^2+z^2)$ | 1 | |
| On remarque que $= x^2+y^2+z^2 = r^2$ | 1 | |
| On utilise le théorème d'Ostrogradsky pour relier le flux à travers la sphère à la divergence : $\displaystyle\oint\!\!\!\oint \vec{A}\cdot\vec{dS} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, d\tau$ | 1 | |
| On a : $d\tau = r^2 sin\theta\; dr\; d\theta\; dd\phi$ en coordonnées sphériques | 1 | |
| L'intégration de la divergence sur tout le volume de la sphère donne : $\displaystyle\iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, d\tau = 3\int_0^R r^4 dr \int_0^\pi sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 3\times\frac{R^5}{5}\times 2\times 2\pi = \frac{12\pi}{5}R^5$ | 2 | 6 |
| Calcul du rotationnel : $\displaystyle\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,E_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right)\vec{u_z} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k\,sin\theta}{r^2}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{-2k}{r^3}sin\theta\right)\right]\vec{u}_z = \vec{0}$ | 2 | |
| Le rotationnel du champ étant nul $\forall$ $r$ et $\theta$, on peut affirmer que $\vec{E}$ dérive d'un potentiel | 1 | |
| Le potentiel se trouve en écrivant : $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta}\vec{u}_\theta$. | 1 | |
| De la première ligne on tire : $V(r,\theta) = \dfrac{kcos\theta}{r^2} + f(\theta)$ | 1 | |
| On reporte ce résultat dans la seconde ligne : $-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta} = \dfrac{ksin\theta}{r^3} \Rightarrow \dfrac{\partial V}{\partial\theta} = -\dfrac{ksin\theta}{r^2} = -\dfrac{ksin\theta}{r^2} + \dfrac{\partial f(\theta)}{\partial\theta} \Rightarrow \dfrac{\partial f(\theta)}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow f(\theta) = \text{cte}$ | 1 | |
| Le potentiel est donc : $V = \dfrac{kcos\theta}{r^2} + \text{cte}$ | 1 | 7 |
| Les lignes de champ sont déterminées en résolvant l'équation : $\vec{E}\wedge M\vec{M'} = \vec{0}$ ($M\vec{M'}$ représentant un déplacement élémentaire dans le repère cylindrique). | 1 (accepter $\vec{E} = kM\vec{M'}$) | |
| Il vient : $\dfrac{2kcos\theta}{r^2}d\theta - \dfrac{ksin\theta}{r^3}dr = 0$ | | |
| Ce qui se réarrange en : $2\dfrac{cos\theta}{sin\theta}d\theta = \dfrac{dr}{r}$ | 1 | |
| Avec la primitive donnée : $\Rightarrow 2\,ln(sin\theta) = ln(r) + \text{cte} \Rightarrow sin^2\theta = kr$, $k$ étant une constante. | 2 | |
| Pour les lignes de champ, on peut écrire plutôt $r = k' sin^2\theta$, $k'$ étant une constante ($=\frac{1}{k}$) et donner quelques valeurs à $\theta$. Par exemple, pour $\theta = 0, r = 0$. Pour $\theta = \frac{\pi}{2}, r = k'$. Pour $\theta = \frac{\pi}{4}, r = \frac{k'}{2}$. Pour $\theta = \frac{\pi}{6}, r = \frac{k'}{4}$. Pour $\theta = \frac{\pi}{3}, r = \frac{3k'}{4}$. On obtient les autres "lobes par symétrie de la fonction $sin^2\theta$. | 1 | |

| | | |
|---|---|---|
|  | 2 (dessin) | 7 |
| **Total exercice 1 :** | | 20 |
| | | |
| **Eléments de correction exo 2 :** | | |
| **Enoncé 1** | | |
| L'erreur initiale porte sur l'opérateur divergence : la formule cartésienne a été utilisée alors qu'en coordonnées sphériques, il s'écrit $\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2E_r)}{dr}$ | 1 | |
| Donc le résultat correct est $(r > R)$ $E_r = \frac{\rho r}{3\epsilon} + \frac{c}{r^2}$ où c est une constante | 1 | |
| et pour $r > R$ $E_r = \frac{d}{r^2}$ où $d$ est une constante. | 1 | |
| $c$ s'obtient en remarquant que tout plan passant par $O$ est plan de symétrie des charges, donc le champ $E_r$ est nul en O | 1 | |
| et $c = 0$. | 1 | |
| La permittivité étant la même dans tout l'espace et en l'absence de charges surfaciques en $r = R$, | 1 | |
| le champ $E_r$ $d$ s'obtient bien par continuité en $r = R$, $d = \frac{\rho R^3}{3\epsilon}$. | 1 | 7 |
| Points à valoriser :<br>formule divergence / intégration correcte de celle-ci / fixation de la constante $c$ / champ interne et externe finaux corrects | | |
| **Enoncé 2** | | |
| Deux erreurs :<br>1/ il faut écrire en **cylindriques** $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ pour $r < R$, ce qui fournit un champ décroissant en $\frac{c}{r}$ où c est une constante.<br>2/ écrire la relation de passage correctement en définissant le milieu 1 $(r < R)$, le milieu 2 $(r > R)$, le vecteur unitaire de 1 vers 2, $\vec{u}_r$, en constatant que toutes les composantes de $\vec{E}$ sont normales à la surface car colinéaires à $\vec{u}_r$, en écrivant la limite de chaque expression en $R-$ et $R+$, $\frac{c}{R}$ et $\frac{\sigma}{\epsilon}$, et enfin la relation de passage $\frac{\sigma}{\epsilon} - \frac{c}{R} = \frac{\sigma}{\epsilon}$ d'où il découle que $c = 0$.<br>Je pense qu'on peut accepter une fixation de $c$ par le fait que $\vec{E} = 0$ sur l'axe du cylindre (tout plan le contenant étant plan de symétrie), à condition de vérifier la relation de passage ensuite.<br>**Détail des points :** | | |
| Détection de l'erreur (1 point pour celles et ceux qui disent explicitement qu'il faut écrire l'équation de Maxwell avant de faire la relation de passage) et écriture de l'équation de Maxwell permettant de trouver l'expression champ interne à la constante près (1 point) : | 2 | |
| Détection de l'erreur (1 point) et écriture correcte de la relation de passage en $r = R$, avec définition de la normale et des milieux 1 et 2 (1 point) : | 2 | |

| | | |
|---|---|---|
| Fixation correcte de la constante $c$ : | 2 | |
| Bonus pour celles et ceux qui remarquent qu'on n'a rien dit sur les invariances du champ $\vec{E}$ | 1 | 6 + 1 bonus |

## Enoncé 3

Là l'erreur est plus subtile : $\vec{E}_2$ est incorrect car centré au mauvais endroit $\frac{h}{2}$ au lieu de -$\frac{h}{2}$.

La sommation en dehors de la zone chargée est correcte (au passage résultat important : il signifie qu'un cristal ionique, alternance de plans + et de plans −, ne crée pas de champ dans l'espace environnant). Le résultat dans la zone chargée est choquant parce que discontinu alors qu'il n'y a que des charges volumiques !

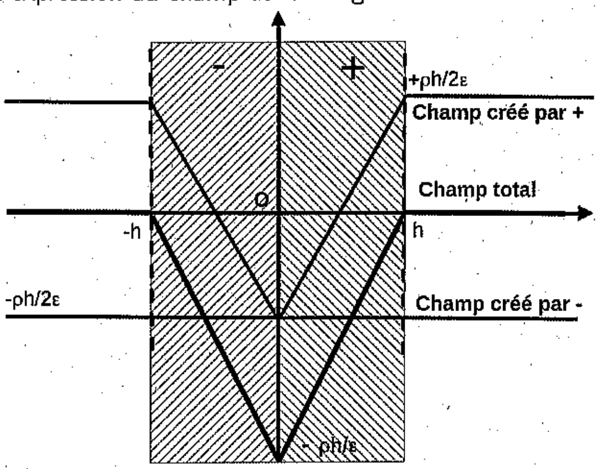
En fait, on ne somme jamais les expressions internes des deux champs en même temps, mais une expression interne avec une expression externe. Ainsi pour $0 < z < h$ on somme $f_1(z) = \frac{\rho(z - h/2)}{\epsilon}$ avec $f_2(z) = -\frac{\rho h}{2\epsilon}$ ce qui donne $f(z) = \frac{\rho(z-h)}{\epsilon}$

Le champ est négatif ou nul, nul aux extrémités de la zone chargée et minimal en $z = 0$.

Accepter une résolution graphique !

**Détail des points :**

| | | |
|---|---|---|
| Identification de la nature de l'erreur (non prise en compte du décalage spatial entre les champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$) ($\frac{h}{2}$ au lieu de -$\frac{h}{2}$ et superposition incorrecte des champs qui en résulte) : | 2 | |
| Détection de l'incohérence entre champ discontinu (tel que trouvé dans l'énoncé à corriger) et absence de charges surfaciques (ou changement de milieu) | 1 | |
| Résolution par toute méthode appropriée (analytique ou graphique), comprenant l'expression du champ dans 4 régions différentes de l'espace : | 4 | 7 |




| | | |
|---|---|---|
| Total exercice 2 : | | 20 + 1 bonus |
| Total IE 1 | | 40 + 1 bonus |