INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

N° GROUPE	NOM	PRENOM

FIMI 2ème année

Mécanique des systèmes - Examen de fin de semestre 1

Date 05/02/2025 – Durée 2h (14h-16h)

Etude cinématique d'un mécanisme de retour rapide

Documents autorisés : 2 pages A4 de formulaire personnel ; calculatrice ; tableau des liaisons standard.

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes. Le barème fourni est indicatif.

1 ETUDE ANALYTIQUE (~10PTS)

Le système étudié est représenté sur la figure 1 et son modèle cinématique est donné en **figure 4**. Le problème est plan de normale $\vec{z} = \vec{z}_{0,1,2,3,4}$

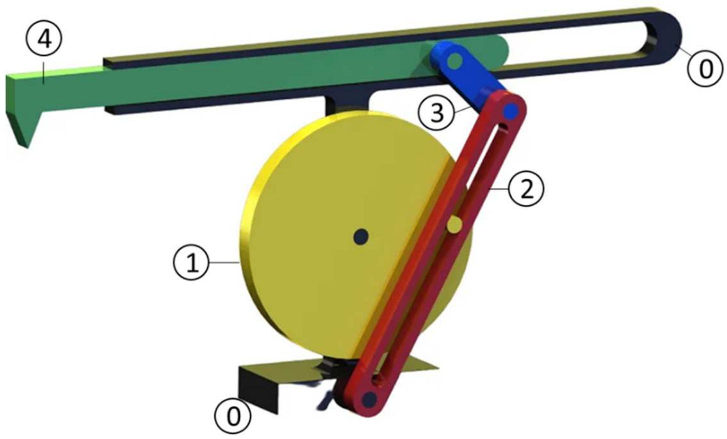


Figure 1 – Modèle CAO d'un mécanisme de retour rapide

Le mécanisme est constitué de 4 solides rigides :

- Un vilebrequin S_1 d'excentricité r en liaison pivot d'axe $(B,\vec{z})$ avec le bâti S_0.

  Paramètre de mouvement 1/0 : $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$.
- Un bras oscillant S_2 de longueur L qui est :
  - d'une part, en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z})$ avec le bâti S_0.

    Paramètre de mouvement 2/0 : $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$.
  - d'autre part, en liaison pivot d'axe $(C,\vec{z})$ avec la biellette S_3

    Cette liaison n'est pas paramétrée.
  - et enfin, en liaison que l'on assimilera à une linéaire annulaire d'axe $(O,\vec{x}_2)$ avec le solide S_1 de sorte que le doigt à l'extrémité de S_1 coulisse dans la rainure de S_2

    Cette liaison n'est pas paramétrée.

- Une biellette S_3 de longueur *e* qui est en liaison pivot d'axe $(C,\vec{z})$ avec le bras oscillant S_2 (comme indiqué prédédemment) et en liaison pivot d'axe $(D,\vec{z})$ avec le coulisseau S_4(cf. ci-dessous)

Le mouvement de cette biellette n'est pas paramétré ; elle réalise une fermeture de chaîne « par joint ».

- Un coulisseau S_4 en liaison pivot d'axe $(D,\vec{z})$ avec S_3 non paramétrée, et en liaison glissière (prismatique) d'axe$(D,\vec{x}_{4,0})$ avec le bâti S_0.

Paramètre de mouvement 4/0 : $x = \overrightarrow{OD}.\vec{x}_{0,4}$

Les données géométriques du problème sont fournies sur la figure 4. La rotation de S_1 constitue l'entrée du mécanisme, la sortie correspond au mouvement du coulisseau S_4 par rapport au bâti S_0.

1.1 EQUATIONS DE LIAISON

1. Tracer le graphe des liaisons et les figures de changement de base **dans le cadre fourni en dessous de la figure 4**.
2. Ecrire et développer la (les) condition(s) de liaison entre S_1 et S_2. *On ne cherchera pas à résoudre.*

$$A \in D(O,\vec{x}_2) \rightarrow \vec{OA}.\vec{y}_2 = 0$$

$$(d\,\vec{y}_0 + r\,\vec{x}_1).\vec{y}_2 = 0$$

$$\boxed{d\cos\theta_2 + r\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0} \quad (1)$$

3. Ecrire et développer la (les) condition(s) de liaison de type 'joint' entre S_2 et S_4. *On ne cherchera pas à résoudre.*

$$CD^2 = e^2$$

$$\left[-L\,\vec{x}_2 + (b+d)\vec{y}_0 + x\,\vec{x}_{0,4}\right]^2 = e^2$$

$$\boxed{(x - L\cos\theta_2)^2 + (b + d - L\sin\theta_2)^2 = e^2} \quad (2)$$

4. Donner le degré de mobilité du système.

d= 3 paramètres – 2 équations de liaison (1) et (2)=1

N° GROUPE	NOM	PRENOM

FIMI 2ème année

1.2 TORSEURS CINEMATIQUES

Les questions précédentes ont permis d'établir les relations entre les paramètres cinématiques. On analyse désormais les différents mouvements.

5. Donner la nature du mouvement 1/0 et préciser la nature du torseur cinématique associé. Exprimer les éléments de réduction de ce torseur cinématique au point A.

Rotation de centre B (torseur cinématique se réduisant à un vecteur glissant)

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}_1 \, \vec{z}_{0,1} \\ \vec{V}(B,1/0) = \vec{0} \end{cases}$$

Eléments de reduction au point A – Vitesse d'un point sur trajectoire ciculaire de rayon r

$$\boxed{\begin{cases} \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}_1 \, \vec{z}_{0,1} \\ \vec{V}(A,1/0) = r\dot{\theta}_1 \, \vec{y}_1 \end{cases}}$$

6. Exprimer le torseur cinématique du mouvement 2/0 au point O. Quelle est la trajectoire du point C dans son mouvement par rapport à S_0? Calculer alors le vecteur vitesse $\vec{V}(C,2/0)$ et le vecteur accélération $\vec{A}(C,2/0)$

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\theta}_2 \, \vec{z}_{0,2} \\ \vec{V}(O,2/0) = \vec{0} \end{cases}$$

C décrit un cercle de rayon L et de centre O, on en déduit:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{V}(C,2/0) &= L\dot{\theta}_2 \, \vec{y}_2 \\ \vec{A}(C,2/0) &= L\ddot{\theta}_2 \, \vec{y}_2 - L\dot{\theta}_2^2 \, \vec{x}_2 \end{aligned}}$$

7. Exprimer le torseur cinématique du mouvement 1/2 au point A. Vérifier que $\vec{V}(A,1/2)$ est dans la direction de $\vec{x}_2$ (*on pourra utiliser la dérivée par rapport au temps d'une équation de liaison*).

a) Composition des vitesses

$$\begin{aligned} \vec{V}(A,1/2) &= \vec{V}(A,1/0) - \vec{V}(A,2/0) \\ &= r\dot{\theta}_1 \, \vec{y}_1 - \vec{V}(0,2/0) - \vec{\Omega}_{2/0} \times (d\,\vec{y}_0 + r\,\vec{x}_1) \\ &= r(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\,\vec{y}_1 + d\dot{\theta}_2 \, \vec{x}_0 \end{aligned}$$

b) Ou dérivation (A est aussi un point matériel) :

$$\vec{V}(A,1/2)=\frac{d^2}{dt}\left(O\vec{A}\right)=\frac{d^2}{dt}\left(d\,\vec{y}_0+r\,\vec{x}_1\right)$$
$$=\vec{\Omega}_{0/2}\times d\,\vec{y}_0+\vec{\Omega}_{1/2}\times r\,\vec{x}_1$$
$$=d\dot{\theta}_2\,\vec{x}_0+r\left(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2\right)\vec{y}_1$$

On doit vérifier que :

$$\vec{V}(A,1/2).\vec{y}_2=0$$

soit:

$$-d\dot{\theta}_2\sin\theta_2+r\left(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2\right)\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)=0$$

qui correspond à la dérivée de l'équation de liaison (1)

8. Le coulisseau S_4 constitue la sortie du mécanisme, donnez la nature du mouvement de 4/0 et exprimez son torseur cinématique au point E.

$4/0$ est une translation d'axe $\vec{x}_{0,4}$

$$\begin{cases}\vec{\Omega}_{4/0}=\vec{0}\\ \vec{V}(E,4/0)=\dot{x}\,\vec{x}_{0,4}\end{cases}$$

1.3 MECANISME A RETOUR RAPIDE

Une étude simplifiée est proposée afin d'apprécier la différence de vitesse entre les mouvements d'avance (dans la direction de $-\vec{x}_{0,4}$) et de recul (dans la direction de $+\vec{x}_{0,4}$).

9. La figure 2 ci-dessous représente l'évolution du paramètre de translation x en fonction de l'angle θ_1 obtenue numériquement grâce aux équations de liaison pour les valeurs numériques suivantes : L=500 mm ; e=120 mm ; r=100 mm ; b+d=500 mm.
   a- En supposant que la vitesse angulaire du vilebrequin $\omega_1=\dot{\theta}_1$ est constante, expliquer comment il est possible d'estimer les vitesses moyennes durant les phases d'avance et de retour du coulisseau à partir des valeurs portées sur la figure 2.
   b- Déterminer ces vitesses moyennes pour $\omega_1=0.6$ rd/s et conclure sur la propriété de retour rapide de ce système.

N° GROUPE	NOM	PRENOM

FIMI 2ème année

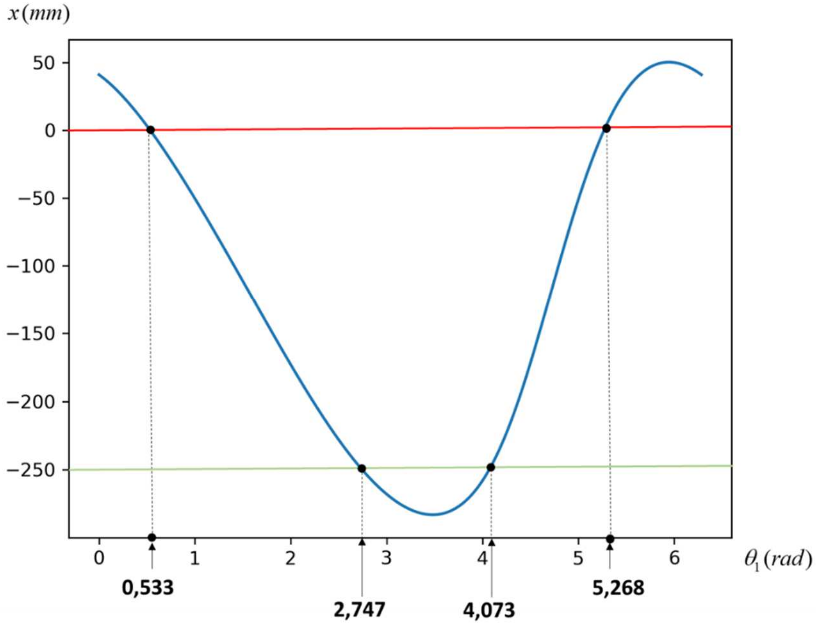


Figure 2 – Evolution de x en fonction de l'angle θ_1 du vilebrequin S_1

$$|\dot{x}| \simeq \left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| = \left|\frac{\Delta x}{\Delta \theta}\right| \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \omega_1 \left|\frac{\Delta x}{\Delta \theta}\right|$$

$$|\dot{x}_{avance}| \simeq 0.6 \frac{250}{2.747 - 0.533} = 67.8 \text{ mm/s}$$

$$|\dot{x}_{retour}| \simeq 0.6 \frac{250}{5.268 - 4.073} = 125 \text{ mm/s}$$

Pratiquement, deux fois plus rapide dans la phase de retour que dans la phase d'avance (Archéologie technologique: propriété utilisée dans les étaux limeurs, la phase lente était la phase de coupe...)

2 MECANISME A RETOUR RAPIDE : ETUDE GRAPHIQUE (~6PTS)

Pour chacune des questions de la partie 2, les **tracés seront effectués sur la figure 5 en annexe 1**, et les **justifications associées** seront fournies dans les cadres ci-dessous prévus à cet effet.

a) On donne $\vec{V}(A,1/0)$ sur la figure 5 (Annexe 1), justifier sa direction.

N° GROUPE	NOM	PRENOM

FIMI 2ème année

Le mouvement 1/0 est une rotation de centre B et A est un point de S1. Son vecteur vitesse /(Ro) est donc perpendiculaire au rayon vecteur BA.

b) A partir de la composition des vitesses, tracer $\vec{V}(A,2/0)$ et $\vec{V}(A,1/2)$

$\vec{V}(A,2/0)=\vec{V}(A,2/1)+\vec{V}(A,1/0)$

avec

* $\vec{V}(A,2/0)\perp OA$ car 2/0 est une rotation de centre O
* $\vec{V}(A,2/1)//(A,\vec{x}_2)$ cf résultats analytiques
* $\vec{V}(A,1/0)$ donné

Cf Figure

c) En déduire $\vec{V}(C/0)$

C est un point de 2 et 2/0 est une rotation de centre O.

$\vec{V}(C/0)\perp OC$

et

$\left\|\vec{V}(C/0)\right\|$ varie linéairement avec la distance au point O

la variation linéaire est définie par $\left\|\vec{V}(A/0)\right\|$

d) Construire le CIR I_{30} du mouvement 3/0. Tracer les vitesses $\vec{V}(D/0)$ et $\vec{V}(E/0)$

Deux rayons vecteurs sont connus pour la rotation tangente 3/0 : OC et OD. L'intersection donne $O=I_{30}$ (cas particulier)

Connaissant I_{30} et $\vec{V}(C/0)=\vec{V}(C,3/0)$, $\vec{V}(D,3/0)$ est déduit par les propriétés des rotations tangentes (perpendiculaire à OD, amplitude proportionnelle à la distance au centre instantané de rotation, sens et calibration par $\vec{V}(C/0)=\vec{V}(C,3/0)$)

$\vec{V}(D,3/0)=\vec{V}(D,4/0)$

4/0 est une translation donc le champ de vitesses est uniforme et $\vec{V}(E,4/0)=\vec{V}(D,4/0)$

e) Tracer $\vec{V}(O,2/1)$ et en déduire le CIR I_{21} du mouvement 2/1

$\vec{V}(O,2/1)=\vec{V}(O,2/0)-\vec{V}(O,1/0)=-\vec{V}(O,1/0)$

N° GROUPE	NOM	PRENOM

FIMI 2ème année

1/0 est une rotation de centre B et $\vec{V}(A,1/0)$ est connue, on en déduit $\vec{V}(0,1/0)$

I21 est à l'intersection des perpendiculaires à $\vec{V}(O,2/1)$ et $\vec{V}(A,2/1)$

3 AJOUT D'UNE ROULETTE AVEC ROULEMENT SANS GLISSEMENT (~4PTS)

Afin de réduire le glissement entre les solides 1 et 2, une roulette de rayon ρ (solide 5) est montée sur l'ergot en A (Figure 3). Une liaison pivot d'axe $(A,\vec{z})$ relie les solides 5 et 1, le paramètre de mouvement associé est $\alpha=(\vec{x}_1,\vec{x}_5)$. Pour la phase du mouvement considérée, on suppose, par ailleurs, que le contact entre la roulette (solide 5) et la rainure du solide 2 n'existe qu'au point I (sur la partie gauche de la rainure, un jeu non représenté existe sur le côté opposé) ; ce contact est permanent et s'effectue sans glissement.

1 – Après avoir identifié une normale unitaire au contact au point I, en déduire les vecteurs pivotement et roulement $\vec{P}(I,5/2)$ et $\vec{R}(I,5/2)$.

$\vec{n}=\pm\vec{y}_2$ normale unitaire au contact en I

$$\vec{\Omega}_{5/2}=\vec{\Omega}_{5/1}+\vec{\Omega}_{1/0}-\vec{\Omega}_{2/0}=\left(\dot{\alpha}+\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2\right)\vec{z}$$

d'où:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{P}(I,5/2)&=\left(\vec{\Omega}_{5/2}.\vec{y}_2\right).\vec{y}_2=\vec{0}\\ \vec{R}(I,5/2)&=\vec{\Omega}_{5/2}=\left(\dot{\alpha}+\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2\right)\vec{z}\end{aligned}}$$

2 – Ecrire et développer la condition de roulement sans glissement au point de contact I

N° GROUPE	NOM	PRENOM

FIMI 2ème année

La position du point de contact I est définie par $\vec{AI} = \rho\,\vec{y}_2$

$$\vec{V}(I,5/2)=\vec{0}$$

$$\vec{V}(I,5/1)+\vec{V}(I,1/0)-\vec{V}(I,2/0)=\vec{0}$$

$$\vec{V}(A,5/1)+\vec{\Omega}_{5/1}\times\vec{AI}+\vec{V}(A,1/0)+\vec{\Omega}_{1/0}\times\vec{AI}-\vec{V}(O,2/0)-\vec{\Omega}_{2/0}\times\vec{OI}=\vec{0}$$

$$\vec{0}+\dot{\alpha}\,\vec{z}\times\rho\,\vec{y}_2+r\,\dot{\theta}_1\,\vec{y}_1+\dot{\theta}_1\vec{z}\times\rho\,\vec{y}_2-\vec{0}-\dot{\theta}_2\vec{z}\times\left(d\,\vec{y}_0+r\,\vec{x}_1+\rho\vec{y}_2\right)=\vec{0}$$

$$-\rho\dot{\alpha}\,\vec{x}_2+r\,\dot{\theta}_1\,\vec{y}_1-\rho\dot{\theta}_1\,\vec{x}_2+\rho\dot{\theta}_2\,\vec{x}_2-r\dot{\theta}_2\,\vec{y}_1+d\dot{\theta}_2\,\vec{x}_0=\vec{0}$$

$$\boxed{\rho\left(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1-\dot{\alpha}\right)\vec{x}_2+r\left(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2\right)\vec{y}_1+d\dot{\theta}_2\,\vec{x}_0=\vec{0}}$$

Projection selon $\vec{x}_2$ (car $\vec{V}(I,5/2)\perp\vec{y}_2$) :

$$\boxed{\rho\left(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1-\dot{\alpha}\right)+r\left(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2\right)\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)+d\dot{\theta}_2\cos\theta_2=0}$$

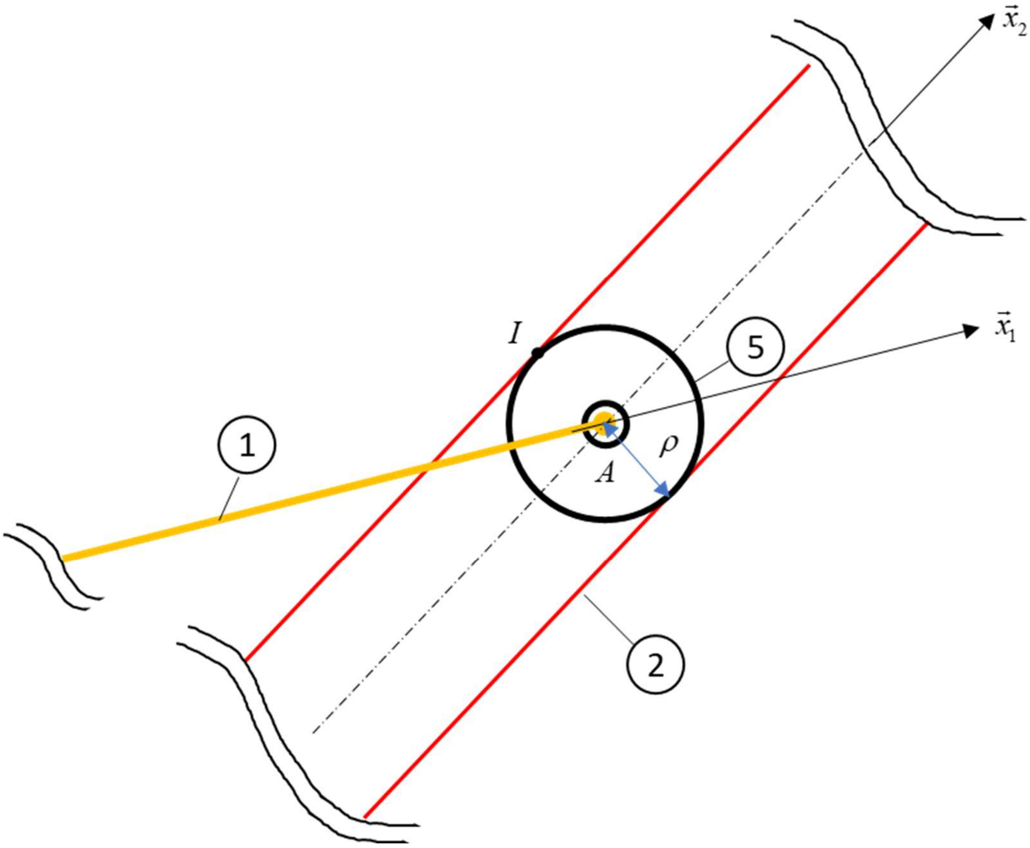


Figure 3 – Contact roulette-rainure

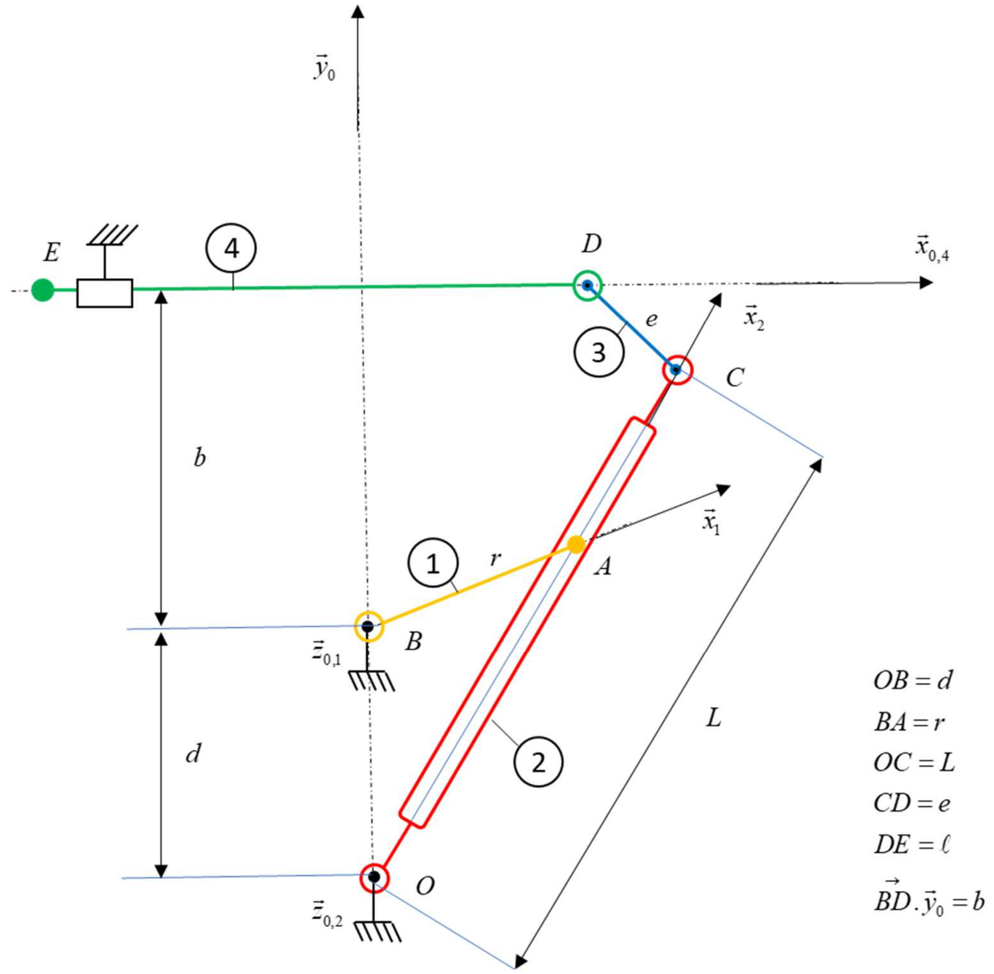
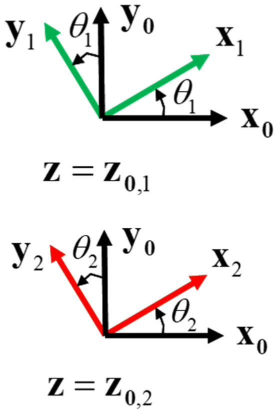
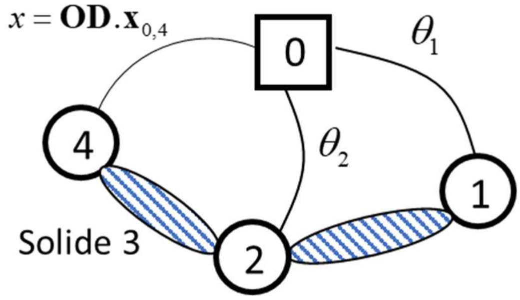


Figure 4. Schéma cinématique du mécanisme à retour rapide

Figures de changement de bases et graphe des liaisons



Graphe des liaisons



ANNEXE 1	***NOM***	***PRENOM***

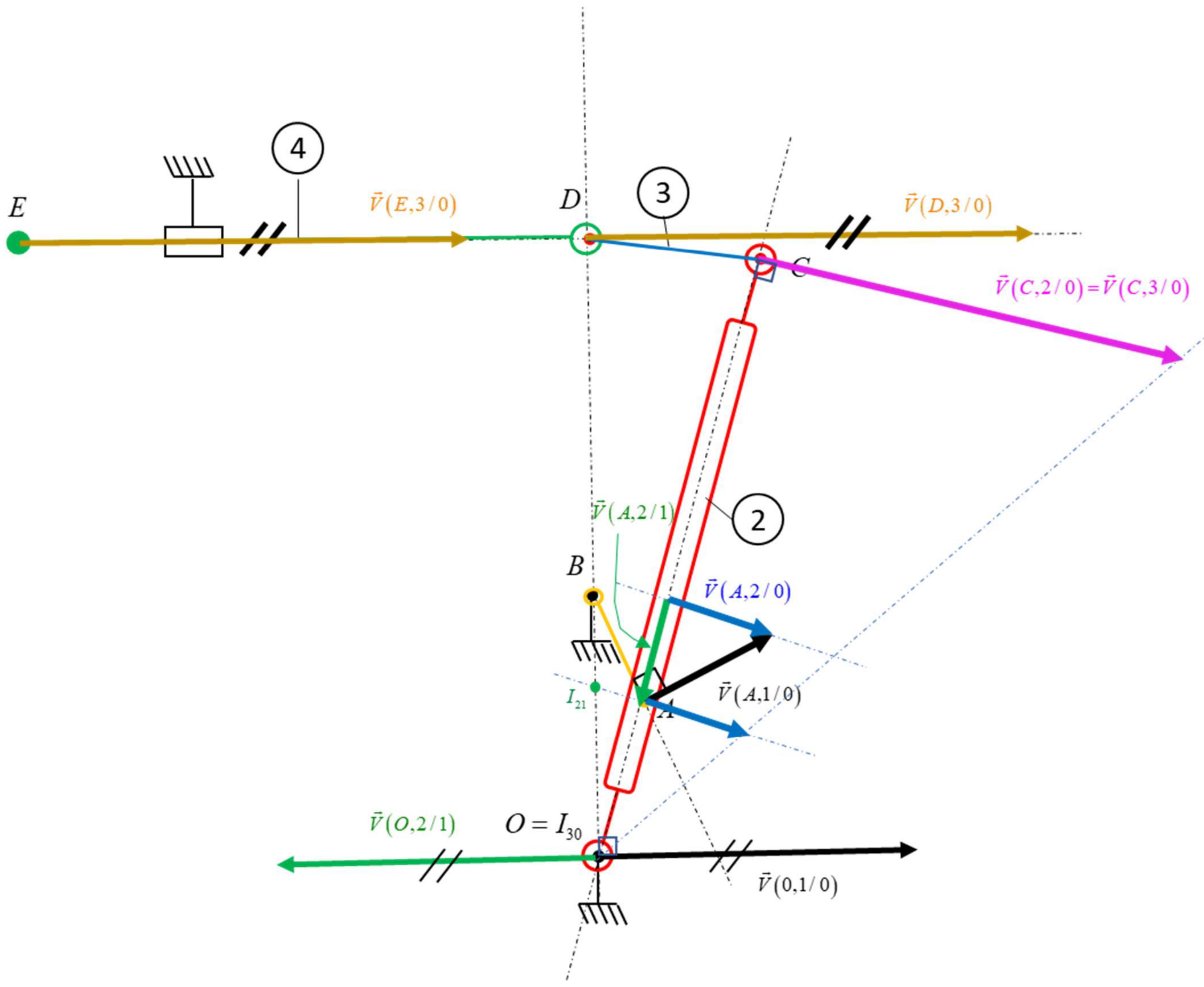


Figure 5 : Schéma pour la construction graphique