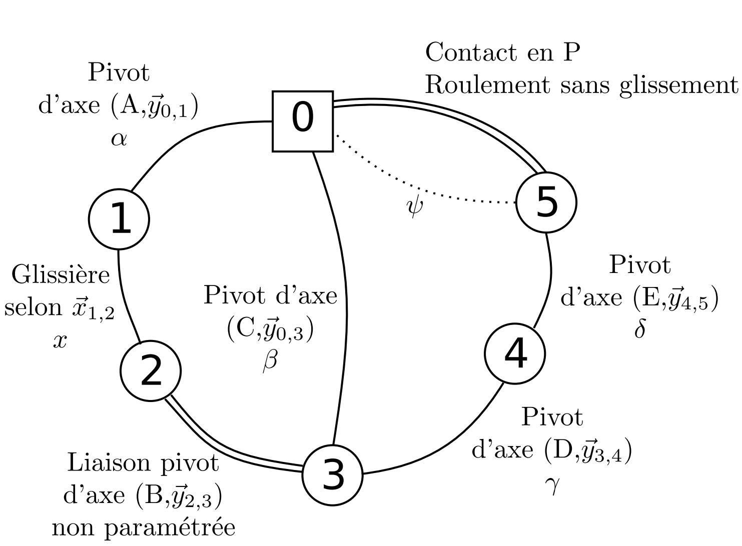
Mécanique Générale - Évaluation de fin de semestre

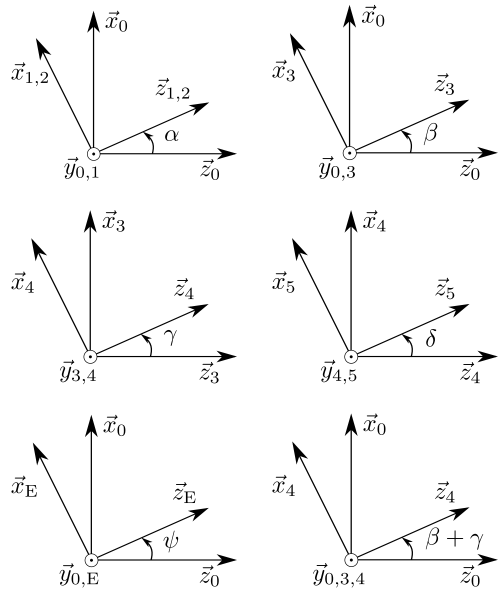
01/02/2023 – 2h
Sont autorisés : Formulaire (2 pages A4 + 1 tableau des liaisons)
Calculatrice non programmable

Étude d'un mécanisme de dépôt de revêtement

1 Etude cinématique analytique

1. Graphe des liaisons et figures de changement de base





2. La trajectoire de E par rapport à R_0 est un cercle de centre I et de rayon (R+r).

3. Calcul de $\vec{V}\,(\mathrm{E}/0)$ en fonction de R, r et ψ

   $\vec{V}\,(\mathrm{E}/0) = \vec{V}\,(\mathrm{E},5/0) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{IE}}}{\mathrm{d}t}\right)_0 = (R+r)\ \vec{\Omega}(\mathrm{E}/0) \wedge \vec{z}_{\mathrm{E}}$

$$\boxed{\vec{V}\,(\mathrm{E},5/0) = (R+r)\ \dot{\psi}\vec{x}_{\mathrm{E}}}$$

4. Condition de non glissement en P $\Rightarrow \vec{V}\,(\mathrm{P},5/0) = \vec{0}$.

   P est fixe dans R_{E}. Il est possible de calculer $\vec{V}\,(\mathrm{P},5/0)$ de deux manières :

   - Par cinématique du solide : $\vec{V}\,(\mathrm{P},5/0) = \vec{V}\,(\mathrm{E},5/0) + \overrightarrow{\mathrm{PE}} \wedge \vec{\Omega}(5/0)$
$$\begin{aligned} \vec{V}\,(\mathrm{P},5/0) &= (R+r)\ \dot{\psi}\vec{x}_{\mathrm{E}} + r\ \vec{z}_{\mathrm{E}} \wedge \left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)\vec{y}_{\mathrm{E}} \\ &= \left((R+r)\ \dot{\psi} - r\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)\right)\vec{x}_{\mathrm{E}} \end{aligned}$$

   - Par composition du mouvement : $\vec{V}\,(\mathrm{P},5/0) = \vec{V}\,(\mathrm{P}/0) - \vec{V}\,(\mathrm{P}/5)$
$$\begin{aligned} \vec{V}\,(\mathrm{P}/0) &= \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{IP}}}{\mathrm{d}t}\right)_0 \\ &= R\ \vec{\Omega}(\mathrm{E}/0) \wedge \vec{z}_{\mathrm{E}} \\ &= R\ \dot{\psi}\ \vec{x}_{\mathrm{E}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \vec{V}\,(\mathrm{P}/5) &= \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{EP}}}{\mathrm{d}t}\right)_5 \\ &= (-r)\ \vec{\Omega}(\mathrm{E}/5) \wedge \vec{z}_{\mathrm{E}} \\ &= -r\left(\dot{\psi}-\dot{\beta}-\dot{\gamma}-\dot{\delta}\right)\vec{x}_{\mathrm{E}} \end{aligned}$$

     D'où $\vec{V}\,(\mathrm{P},5/0) = \left((R+r)\ \dot{\psi} - r\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)\right)\vec{x}_{\mathrm{E}}$

$$\boxed{(R+r)\ \dot{\psi} = r\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)} \qquad \text{(edl1)}$$

5. Contact au point P $\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{IP}} = R\vec{z}_{\mathrm{E}}$ ou $\mathrm{P}_0 \equiv \mathrm{P}_5 \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_5} = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{IP}} &= \overrightarrow{\mathrm{IC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{DE}} + \overrightarrow{\mathrm{EP}} \\
&= -L\vec{x}_0 + (b+c)\vec{x}_3 + e\vec{x}_4 - r\vec{z}_{\mathrm{E}} \\
&= (-L + (b+c)\cos\beta + e\cos(\beta+\gamma) - r\sin\psi)\,\vec{x}_0 + (-(b+c)\sin\beta - e\sin(\beta+\gamma) - r\cos\psi)\,\vec{z}_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{IP}} &= R\vec{z}_{\mathrm{E}} \\
&= R\sin\psi\vec{x}_0 + R\cos\psi\vec{z}_0
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_5} &= \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{I}} + \overrightarrow{\mathrm{IC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{DE}} + \overrightarrow{\mathrm{EP}_5} \\
&= -R\vec{z}_{\mathrm{E}} - L\vec{x}_0 + (b+c)\vec{x}_3 + e\vec{x}_4 - r\vec{z}_{\mathrm{E}} \\
&= (-L + (b+c)\cos\beta + e\cos(\beta+\gamma) - (R+r)\sin\psi)\,\vec{x}_0 + (-(b+c)\sin\beta - e\sin(\beta+\gamma) - (R+r)\cos\psi)\,\vec{z}_0
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
\boxed{(R+r)\sin\psi = (b+c)\cos\beta + e\cos(\beta+\gamma) - L} & \text{(edl2)} \\[2ex]
\boxed{(R+r)\cos\psi = -(b+c)\sin\beta - e\sin(\beta+\gamma)} & \text{(edl3)}
\end{array}\right.$$

6. Fermeture de chaîne en B $\Rightarrow \mathrm{B}_2 \equiv \mathrm{B}_3 \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3} = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3} &= \overrightarrow{\mathrm{B}_2\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}_3} \\
&= -x\vec{x}_{1,2} - a\vec{z}_0 + c\vec{x}_3 \\
&= (-x\cos\alpha + c\cos\beta)\,\vec{x}_0 + (x\sin\alpha - a - c\sin\beta)\,\vec{z}_0
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
\boxed{x\cos\alpha = c\cos\beta} & \text{(edl4)} \\[2ex]
\boxed{x\sin\alpha = a + c\sin\beta} & \text{(edl5)}
\end{array}\right.$$

Une autre solution est d'écrire : $\overrightarrow{\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3} = \overrightarrow{\mathrm{B}_2\mathrm{C}} + \overrightarrow{\mathrm{CI}} + \overrightarrow{\mathrm{IE}} + \overrightarrow{\mathrm{ED}} + \overrightarrow{\mathrm{DB}_3}$. Cependant cette solution conduit à retrouver les équations (edl2) et (edl3).

7. Degré de mobilité : $k = n - m$ avec :
   - n = 6 (α, x, β, γ, δ et ψ)
   - m = 5 ((edl1), (edl2), (edl3), (edl4) et (edl5))

$$\boxed{k = 6 - 5 = 1}$$

Il suffit de commander la position x du vérin linéaire pour mettre en mouvement l'ensemble du mécanisme et notamment le rouleau S_5.

8. Le torseur cinématique 2/0 en B s'écrit :

$$\boxed{\left\{\mathcal{V}_{2/0}\right\}_{(\mathrm{B})} : \left\{\begin{array}{l}
\vec{\Omega}(2/0) = \dot{\alpha}\vec{y} \\
\vec{V}(\mathrm{B},2/0) = \vec{V}(\mathrm{B},2/1) + \vec{V}(\mathrm{B},1/0) = \dot{x}\vec{x}_{1,2} - x\dot{\alpha}\vec{z}_{1,2}
\end{array}\right.}$$

9. On peut remarquer que l'automoment de ce torseur est nul car $\vec{\Omega}(2/0)\cdot\vec{V}(\mathrm{B},2/0) = 0$. Il s'agit donc d'un glisseur puisque $\vec{\Omega}(2/0)$ n'est pas nul. Puisque le problème est plan, on peut donc en conclure que le mouvement 2/0 est une rotation instantanée.

10. 2/0 est tangent à une rotation d'axe (I_{20},$\vec{y}$) avec I_{20} tel que $\overrightarrow{\mathrm{BI}_{20}} = \dfrac{\vec{\Omega}(2/0)\wedge\vec{V}(\mathrm{B}/0)}{\left(\vec{\Omega}(2/0)\right)^2} = X_I\vec{x}_1 + Z_I\vec{z}_1$ puisque I_{20} appartient à l'axe de viration (équivalent à l'axe central).

    Ainsi on a $\overrightarrow{\mathrm{BI}_{20}} = X_I\vec{x}_1 + Z_I\vec{z}_1$ avec :

$$\boxed{X_I = -x \qquad\qquad Z_I = -\frac{\dot{x}}{\dot{\alpha}}}$$

11. Le torseur cinématique 5/0 en E s'écrit :

$$\boxed{\{\mathcal{V}_{5/0}\}_{(\mathrm{E})} : \begin{cases} \vec{\Omega}(5/0) = \left(\dot\beta + \dot\delta + \dot\gamma\right)\vec{y} \\ \vec{V}\,(\mathrm{E}, 5/0) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \dot{x}\vec{x}_{1,2} - x\dot\alpha\vec{z}_{1,2} - b\dot\beta\vec{z}_3 - e(\dot\beta + \dot\gamma)\vec{z}_4 \end{cases}}$$

12. $\vec{\Gamma}(E/0) = \vec{A}\,(\mathrm{E}/0) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{V}(\mathrm{E}/0)}{\mathrm{d}t}\right)_0$

$$\boxed{\vec{\Gamma}(E/0) = \vec{A}\,(\mathrm{E}/0) = \left(\ddot{x} - x\dot\alpha^2\right)\vec{x}_1 - \left(2\dot{x}\dot\alpha + x\ddot\alpha\right)\vec{z}_1 - b\dot\beta^2\vec{x}_3 - b\ddot\beta\vec{z}_3 - e\left(\dot\beta + \dot\gamma\right)^2\vec{x}_4 - e\left(\ddot\beta + \ddot\gamma\right)\vec{z}_4}$$

13. Pour déposer une couche homogène, le rouleau doit avoir une **vitesse tangente à la surface** et **sa norme constante**. Il faut donc que la **composante tangentielle de l'accélération soit nulle** $\Rightarrow$ $\vec{A}\,(\mathrm{E}/0) \cdot \vec{x}_{\mathrm{E}} = 0$. L'écriture des équations précédentes permet d'obtenir l'expression des consignes à appliquer au vérin pour assurer un dépôt du revêtement conforme au cahier des charges.

2 Cinématique graphique

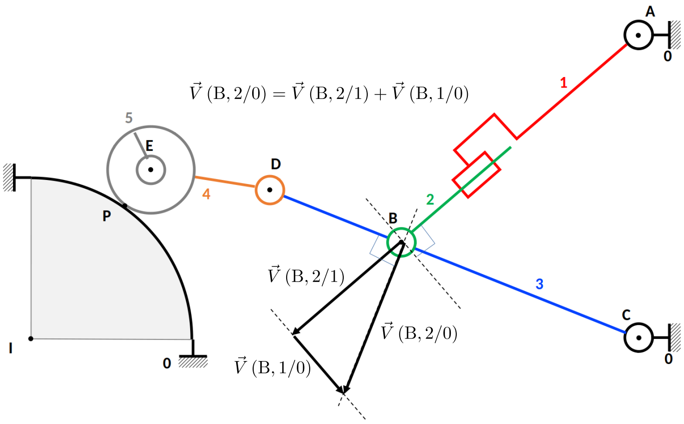
1. Comme la trajectoire de E par rapport à R_0 est un cercle de centre I et de rayon $\|\overrightarrow{\mathrm{IE}}\|$, $\vec{V}\,(\mathrm{E}/0)$ est donc perpendiculaire à la droite (IE) c'est à dire selon $\vec{x}_{\mathrm{E}}$.

2. $\mathrm{B} \in \mathrm{S}_2$ et S_3, $\Rightarrow \vec{V}\,(\mathrm{B}/0) = \vec{V}\,(\mathrm{B}, 2/0) = \vec{V}\,(\mathrm{B}, 3/0)$.

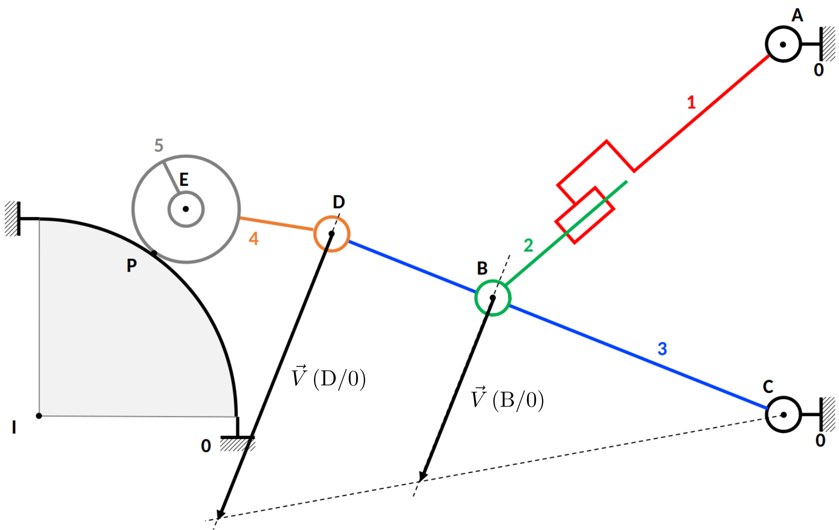
   On a $\vec{V}\,(\mathrm{B}, 2/0) = \vec{V}\,(\mathrm{B}, 2/1) + \vec{V}\,(\mathrm{B}, 1/0)$.
   Sachant que :

   - $\vec{V}\,(\mathrm{B}, 2/1)$ est entièrement connue.
   - Le mouvement 3/0 est une rotation d'axe $(\mathrm{C}, \vec{y}_{0,3}) \Rightarrow \vec{V}\,(\mathrm{B}/0) \perp (\mathrm{CB})$
   - Le mouvement 1/0 est une rotation d'axe $(\mathrm{A}, \vec{y}_{0,1}) \Rightarrow \vec{V}\,(\mathrm{B}, 1/0) \perp (\mathrm{AB})$.

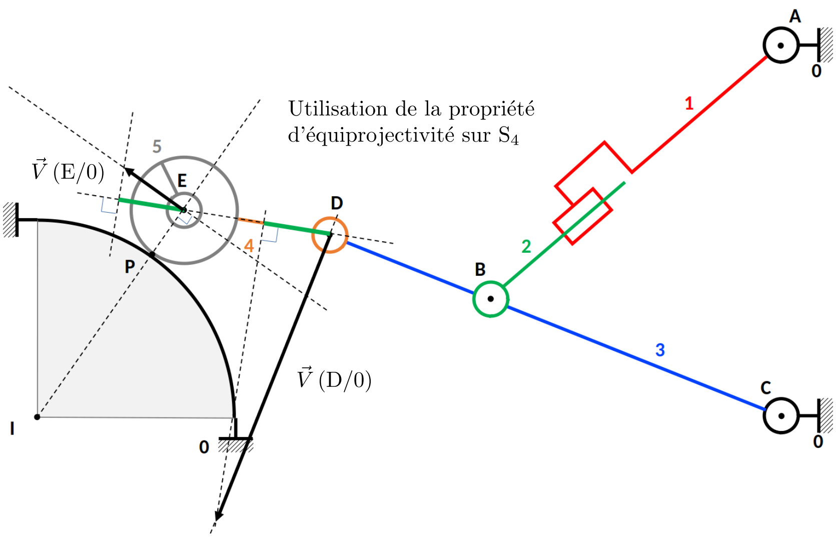
   À partir de ces informations, on peut ainsi obtenir $\vec{V}\,(\mathrm{B}/0)$ par somme vectorielle.



3. $\mathrm{D} \in \mathrm{S}_3$ et S_4, $\Rightarrow \vec{V}\,(\mathrm{D}/0) = \vec{V}\,(\mathrm{D}, 3/0) = \vec{V}\,(\mathrm{D}, 4/0)$.
   Le mouvement 3/0 est une rotation d'axe $(\mathrm{C}, \vec{y}_{0,3}) \Rightarrow \vec{V}\,(\mathrm{D}, 3/0) \perp (\mathrm{CD})$.
   Connaissant $\vec{V}\,(\mathrm{B}, 3/0)$, on peut trouver $\vec{V}\,(\mathrm{D}, 3/0)$ par distribution des vitesses dans une rotation.



4. E $\in$ S$_4$ et S$_5$, $\Rightarrow \vec{V}(\text{E}/0) = \vec{V}(\text{E}, 4/0) = \vec{V}(\text{E}, 5/0)$.
   D'après la première question le support de $\vec{V}(\text{E}/0)$ est connu et $\vec{V}(\text{D}/0)$ est entièrement connu. Il est possible d'utiliser l'équiprojectivité sur S$_4$: $\vec{V}(\text{D}, 4/0) \cdot \overrightarrow{\text{DE}} = \vec{V}(\text{E}, 4/0) \cdot \overrightarrow{\text{DE}}$ pour déterminer $\vec{V}(\text{E}/0)$.
   Il était également possible d'obtenir $\vec{V}(\text{E}/0)$ en utilisant la distribution des vitesses dans une rotation en positionnant dans un premier temps I$_4$0 le CIR de 4/0 (*cf.* construction suivante).



5. On remarque que $\vec{V}(\text{D}, 4/0) \neq \vec{V}(\text{E}, 4/0)$ donc le mouvement 4/0 n'est pas une translation. 4/0 est tangent à une rotation d'axe (I$_{40}$,$\vec{y}$) avec I$_{40}$ situé sur les perpendiculaires de ces 2 vitesses.
   $\Rightarrow$ I$_{40}$ = (IE) $\cap$ (DC).